A MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA: A MATEMÁTICA E SEU ENSINO COMO PRÁTICAS SOCIAIS

VICTOR AUGUSTO GIRALDO - UFRJ

A Matemática Problematizada: a Matemática e seu Ensino como Práticas Sociais

VICTOR GIRALDO

LABORATÓRIO DE PRÁTICAS MATEMÁTICAS PARA O ENSINO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ESTRUTURA DA APRESENTAÇÃO

- **Algumas dicotomias que têm permeado o discurso acadêmico e profissional no contexto do ensino da matemática:**
  - *matemática acadêmica* **x** *matemática escolar*
  - *saberes de matemática "pura"* **x** *saberes de matemática para o ensino*
  - *matemática problematizada* **x** *problematizada*

... e suas implicações para a formação e a prática de professores que ensinam matemática.

ALGUMAS REFLEXÕES INICIAIS

Questão do exame de seleção para o curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, em 2006:

Questão 2. Considere a dízima periódica: $\alpha = 0,\overline{9} = 0,999\ldots$. Determine quais das afirmativas abaixo é a correta. Justifique rigorosamente a sua resposta.

(a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha < 1$

Uma resposta comum: *"É possível **demonstrar rigorosamente** que 0,999...=1, mas não é possível **afirmar realmente** que 0,999...=1."*

0,999... é:

- *um número real "muito próximo de 1";*
- *um número real "infinitamente próximo de 1";*
- *um número real "que tende a 1";*
- *o "último" número real "antes de 1".*

ALGUMAS REFLEXÕES INICIAIS

Em que contexto se deu a formação inicial (graduação) desse professor?

Que pensamento matemático esse professor está produzindo?

MATEMÁTICA ACADÊMICA X MATEMÁTICA ESCOLAR

Felix Klein denuncia, em sua obra – hoje clássica – Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior (1908), uma ***dupla descontinuidade*** na formação universitária do professor de matemática – poucas conexões são estabelecidas:

- por um lado, entre a matemática dos cursos universitários e aquela anteriormente estudada na escola básica;
- por outro lado, entre a matemática dos cursos universitários e aquela que será futuramente praticada em sala de aula.

Klein, Felix. Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: SPM, 2009.

MATEMÁTICA ACADÊMICA X MATEMÁTICA ESCOLAR

- Assim, ao ingressar no curso universitário, o futuro professor deve "esquecer" toda a matemática que aprendeu anteriormente como aluno da escola básica; e ao terminar o curso universitário, o professor deve "esquecer" toda a matemática ali aprendida para ingressar na prática.
- Em consequência, o curso universitário fica sem conexão com a prática de sala de aula e parece ter um efeito inócuo na formação do professor.
- Como a literatura de pesquisa mais recente em Educação Matemática tem indicado, frequentemente o professor com principal referência para a prática sua própria experiência como aluno da escola básica.

Klein, Felix. Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: SPM, 2009.

MATEMÁTICA ACADÊMICA X MATEMÁTICA ESCOLAR

Ball (1988) identifica e desafia **três suposições** que sustentam tacitamente os modelos de cursos de formação inicial de professores de matemática:

- Os conteúdos da matemática escolar são **simples e comumente entendidos**.
- Portanto, estes **não precisam ser reaprendidos** no curso universitário.
- As **disciplinas de matemática universitária são suficientes** para equipar os futuros professores com um saber amplo e profundo da matemática escolar.

Ball, D. L. The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988. http://ncrtl.msu.edu/research.htm.

MATEMÁTICA ACADÊMICA X MATEMÁTICA ESCOLAR

Que ***contextos matemáticos*** *podem ser usados para introduzir a* ***divisão por ½*** *na Escola Básica?*

- A questão foi proposta a alunos de graduação que estão se formando como professores da educação básica, avaliados como "bem sucedidos" em disciplinas de "matemática avançada".
- Nenhum aluno respondeu à pergunta adequadamente.
  - Alguns apresentaram contextos para "divisão por 2".
  - Alguns explicaram a estrutura algébrica formal.
  - Alguns se declaram incapazes de responder.

Ball, D. L. The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, 1988. http://ncrtl.msu.edu/research.htm.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Consideramos que a formação inicial de professores de matemática deve ser sustentada por **outras três premissas**:

- Ensinar matemática na escola básica é uma **atividade profissional**, com práticas e saberes próprios.
- Portanto, a formação de professores que ensinam matemática deve ser concebida **da perspectiva desses saberes e práticas.**
- A escola básica é um **espaço de produção de saberes**, e não de disseminação de saberes que produzidos exclusivamente na academia.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Shulman (1986) critica a desconsideração do conhecimento sobre o conteúdo na avaliação das habilidades para o ensino, que identifica como um ***paradigma perdido***.
- O autor propõe a noção de ***conhecimento pedagógico de conteúdo*** (PCK), como o conhecimento sobre os aspectos do conteúdo que o fazem compreensível a outros – um amálgama especial de conteúdo e pedagogia – isto é, como um conhecimento ***sobre*** o conteúdo ***para*** o ensino.

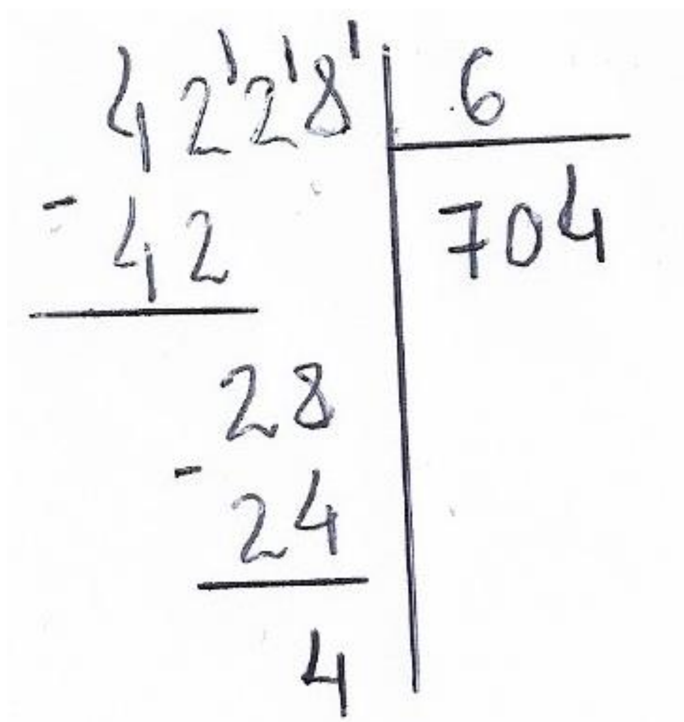
Shulman, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v. 15, p. 4-14, 1968.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

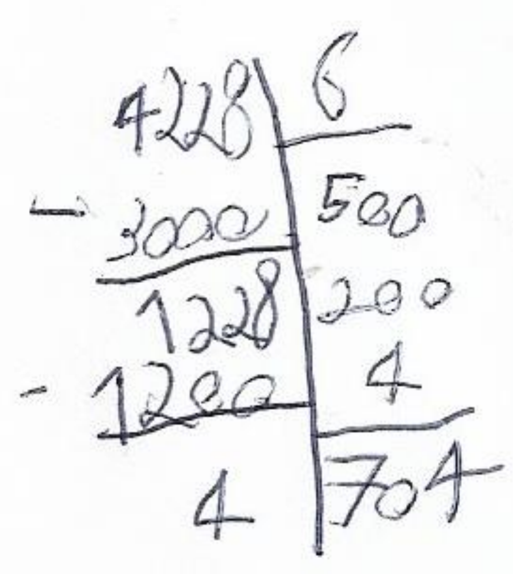
- Esses autores têm sido criticados pela perspectiva estruturalista, que buscaria definir fronteiras entre categorias do conhecimento do professor, e estabelecer listas prescritivas sobre o que o professor deve saber.
- Entretanto, uma contribuição relevante está no reconhecimento da existência de **saberes que são próprios da prática de ensinar matemática na escola básica,** que **são complexos e diversificados** – e, sobretudo, que **não podem ser reduzidos ao conhecimento de conteúdo per se**.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Por exemplo, diferentes algoritmos para a operação de divisão podem ser ensinados na escola básica.



por ordens



por estimativas

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Da **perspectiva dos saberes de matemática *“pura”***, o mais relevante talvez seja o fato de que o algoritmo por ordens é o “ótimo”, pois o resultado é obtido por meio de um processo em que se faz a “melhor escolha” em cada passo.
- Da **perspectiva dos saberes de matemática para o ensino**, o mais relevante é o reconhecimento de que aspectos de cada algoritmo pode fazer emergir estruturas que são importantes para a aprendizagem. Neste sentido, nem sempre o algoritmo “ótimo” será o “melhor”.

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Que ***contextos matemáticos*** *podem ser usados para introduzir a* ***divisão por ½*** *na Escola Básica?*

- **Divisão como repartição**. *Quero dividir igualmente um saco com 30 balas entre 5 crianças. Quantas balas cada criança receberá?*
- **Divisão como medida**. *Quero dividir igualmente um saco com 30 balas em saquinhos com 6 balas em cada. Quantas crianças poderão receber saquinhos?*

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Que ***contextos matemáticos*** *podem se usados para introduzir a* ***divisão por ½*** *na Escola Básica?*

- **Divisão como repartição**. *São dados: a "quantidade total" e o "número de partes". É pedida: a "quantidade parcial".*
- **Divisão como medida**. *São dados: a "quantidade total" e a "quantidade parcial". É pedido: o "número de partes" – isto é: "Quantas vezes a quantidade parcial cabe na quantidade total?"*

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Para Davis & Simmt (2006), o conhecimento matemático que emerge da experiência da prática de professores pode nunca ser **considerado como um aspecto explícito da sua formação** e nem mesmo ser **reconhecido como parte do seu corpo disciplinar formal de conhecimento**.
- Os autores afirmam, ainda, que “o conhecimento de matemática necessário para o ensino não é uma ***versão diluída*** da matemática formal”.

Davis, B.; Simmt, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, v. 61, n. 3, pp. 293-319, 2006.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Para Noddings, a expressão ***conhecimento pedagógico de conteúdo***, cunhada por Shulman, é mais um **grito de guerra político** do que um rótulo para um corpo de conhecimento.
- A autora destaca que a especificidade do conhecimento de matemática do professor tem implicações na sua prática e também na sua formação.

Noddings, N. Professionalization and Mathematics Teaching In: Grouws, D. (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 197-208). New York, NY: Macmillan, 1992.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Em alguns casos, os currículos dos cursos de Licenciatura têm como referência principal o currículo do curso de Bacharelado correspondente, do qual são excluídos tópicos “difíceis” ou “desnecessários” para o professor.
- Assim, a Licenciatura é concebida como um **bacharelado mutilado**.
- Essa é uma ***perspectiva negativa*** para a formação de professores, pois se sustenta em premissas sobre aquilo que o professor ***não*** precisa saber, sem levar em consideração os saberes necessários para a prática.
- Portanto, essa perspectiva **desqualifica o ensino de matemática na escola básica como uma atividade profissional**, com práticas e saberes próprios.

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Busca-se, em lugar disso, uma ***perspectiva afirmativa*** para a formação de professores, isto é, uma concepção orientada a partir **da perspectiva das práticas e dos saberes próprios** da atividade de ensinar matemática na escola básica, considerada como **uma atividade profissional**.
- Nóvoa (2009) defende uma formação de professores construída dentro da própria profissão.

Nóvoa, A. Professores: Imagens do Futuro Presente. Lisboa: Educa, 2009.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- Tardif (2000) destaca a importância da natureza dos saberes próprios do fazer docente, quem **caracterizam os professores profissionalmente e os distinguem de outras profissões e ocupações**.
- Para o autor, o professor deve saber mais do que sua matéria, sua disciplina e seu programa, mas também possuir saberes pedagógicos, e **desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos**.
- Tardif caracteriza os saberes da experiência como “saberes que brotam da experiência e são por ela validados. Incorporam-se à vivência individual e coletiva sob a forma de ‘habitus’ e de habilidades, de saber fazer e de saber ser.”

Tardif, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. Revista Brasileira de Educação, n. 13, 2000.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Cochran-Smith, Lytle (1999) identificam três concepções radicalmente diferentes de formação docente:

- **Conhecimento-*para*-prática.** Os acadêmicos e especialistas geram os conhecimentos formais e teorias para que os professores os aprendam para utilizar ou aplicar na prática.
- Os espaços de aprendizagem profissional são cursos e oficinas conduzidos por especialistas da universidade.

Fiorentini, D.; Crecci, V. Interlocuções com Marilyn Cochran-Smith sobre aprendizagem e pesquisa do professor em comunidades investigativas. Revista Brasileira de Educação, v. 11, n. 65, pp. 505-524, 2016.

MATEMÁTICA "PURA" X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Cochran-Smith, Lytle (1999) identificam três concepções radicalmente diferentes de formação docente:

- **Conhecimento-*na*-prática**. Os conhecimentos para o ensino são de natureza prática e, portanto, não podem ser ensinados, mas aprendidos tácita ou reflexivamente na prática.
- Os professores são autores de sua própria ação docente.
- Porém, o conhecimento pode se tornar naturalizado e reprodutivo, impedindo que o professor e sua docência possam se desenvolver e se transformar continuamente.

Fiorentini, D.; Crecci, V. Interlocuções com Marilyn Cochran-Smith sobre aprendizagem e pesquisa do professor em comunidades investigativas. Revista Brasileira de Educação, v. 11, n. 65, pp. 505-524, 2016.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Cochran-Smith, Lytle (1999) identificam três concepções radicalmente diferentes de formação docente:

- **Conhecimento-*da*-prática**. Os conhecimentos para o ensino não pode ser dissociados em *teóricos* e *práticos*, e são produzidos quando os professores consideram suas próprias práticas como objeto de investigação intencional.
- Os professores produzem o conhecimento no *locus* da prática, trabalhando em comunidades de investigação, em que teorizam a partir da prática, e praticam essas teorias.

Fiorentini, D.; Crecci, V. Interlocuções com Marilyn Cochran-Smith sobre aprendizagem e pesquisa do professor em comunidades investigativas. Revista Brasileira de Educação, v. 11, n. 65, pp. 505-524, 2016.

MATEMÁTICA “PURA” X MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Para Davis & Simmt (2006), o saber do professor de matemática deve contemplar, de forma indissociável, o saber ***sobre a matemática estabelecida*** e o saber ***sobre os processos sociais e históricos por meio dos quais a matemática é produzida***.

Davis, B.; Simmt, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, v. 61, n. 3, pp. 293-319, 2006.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Klein afirma que a escola tem um papel tão central quanto a academia na produção do conhecimento matemático: estabelecer (de forma independente) um terreno cultural que determinará caminhamos segundo os quais novos conhecimentos serão produzidos.
- O autor se refere ao estabelecimento de uma hierarquia entre a matemática elementar e a matemática avançada como **um obstáculo a ser vencido**.

Klein, Felix. Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: SPM, 2009.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Segundo esta perspectiva, "produzir conhecimento matemático" não se restringe a "demonstrar teoremas novos", e abrange todas as práticas sociais matemáticas que incidem no estabelecimento dessas condições culturais.
- Deve-se, portanto, pensar na escola como um espaço de produção, e não como um espaço de aquisição, de transmissão ou de adestramento.

Klein, Felix. Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: SPM, 2009.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Às vezes se estabelece uma dicotomia entre a ***matemática acadêmica*** e a ***matemática escolar***, em que:

- A academia é vista como um lugar em uma posição hierárquica superior, em que o conhecimento é produzido e que deve ditar o que é matemática e, portanto, como esta deve ser ensinada na escola.
- A escola é vista como um lugar onde a matemática produzida na academia é "simplificada" e "difundida", para uma população que não interfere na sua produção, segundo os parâmetros ditados na academia.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Merece mais atenção a dicotomia entre uma exposição da matemática de forma ***não problematizada*** e uma exposição da matemática de forma ***problematizada:***

- A ***matemática não problematizada*** é uma concepção da matemática estabelecida, como um corpo de conhecimento que sempre foi e sempre será da forma que é hoje, ou que evolui linearmente de um estado "mais atrasado" para um estado "mais avançado", por meio da inspiração isolada de "gênios com talento inato".

Giraldo V.; Roque, T. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In: Roque, T.; Giraldo, V. (eds.) O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Merece mais atenção a dicotomia entre uma exposição da matemática de forma ***não problematizada*** e uma exposição da matemática de forma ***problematizada:***

- A ***matemática problematizada***, em contrapartida, é uma concepção da matemática a partir de seus múltiplos processos históricos e sociais de produção.

Giraldo V.; Roque, T. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In: Roque, T.; Giraldo, V. (eds.) O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

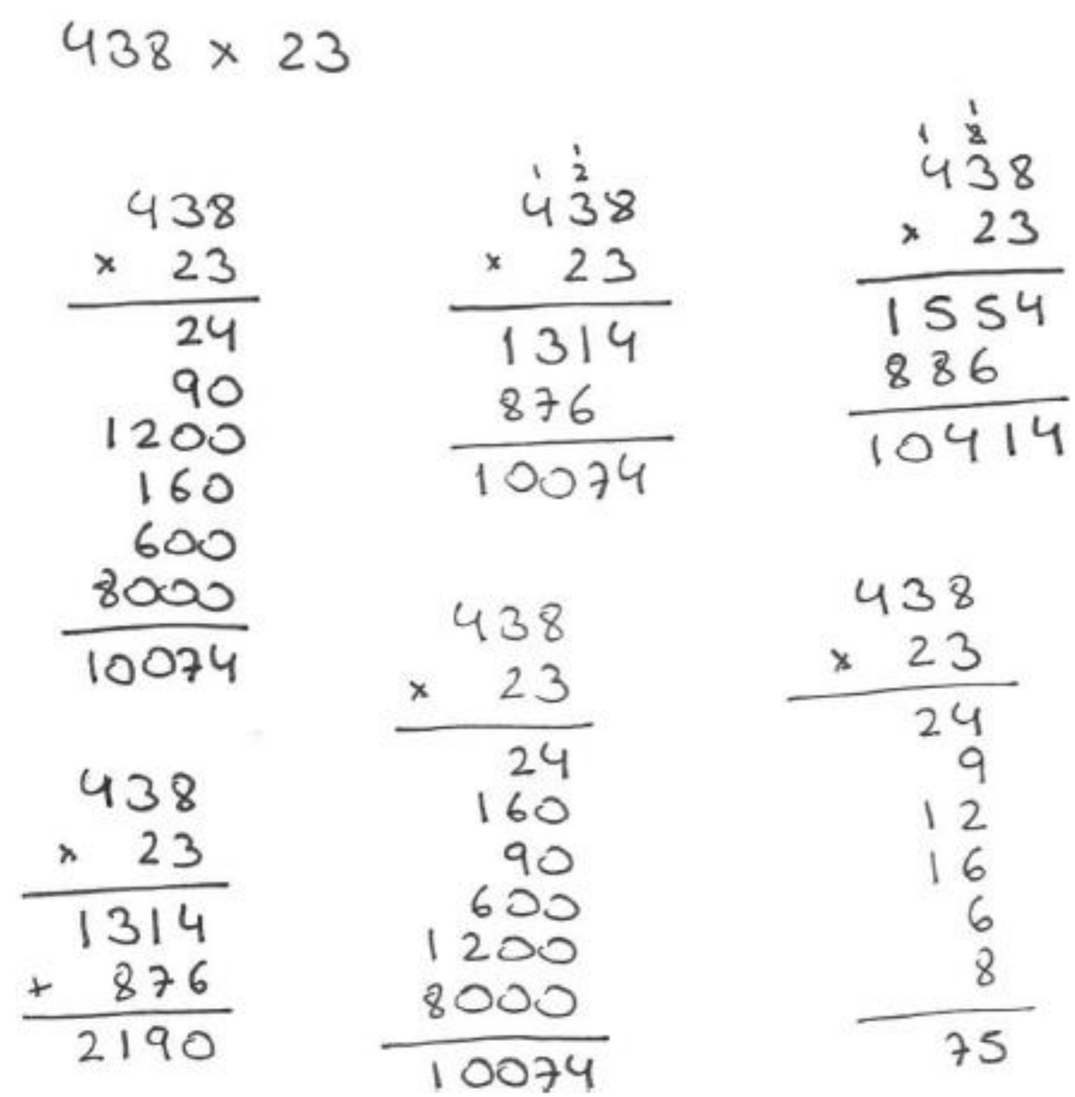
A exposição da matemática de forma não problematizada tem dominado largamente as práticas de ensino de matemática, tanto na escola básica como na universidade, e tem levado a algumas concepções assumidas tacitamente nessas práticas:

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Como a matemática é vista como uma ***"ciência do rigor"***, *seu ensino deve ser* ***"rigoroso"***.
- Como a matemática é vista como ciência da ***"certeza", não há espaço para o erro*** *em seu ensino.*
- Como o conhecimento matemático é ***"organizado em teoremas"***, seu ensino deve privilegiar a ***apresentação de respostas***.
- Como a matemática é produzida historicamente por ***"gênios"***, seu entendimento só é acessível a pessoas com ***"talento inato"***.
- O papel do ensino de matemática, seria, então identificar os estudantes ***"talentosos"*** e separá-los dos ***"fracos"***.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Essas contas estão "certas" ou "erradas"?



Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais.
Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Essas contas estão "certas" ou "erradas"?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & & 6 & 5 & 4 \\
+ & & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & 4 & 14 \\
 & 6 & \cancel{5} & \cancel{4} \\
- & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3 & 2 & \\
 & & & & 3 & 2 & \\
 & & & & 4 & 3 & \\
 & & & & 6 & 5 & 4 \\
\times & & & & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\
 & & & 5 & 5 & 5 & 3 \\
 & & 3 & 6 & 1 & 2 & \\
 & 4 & 5 & 6 & 6 & & \\
\hline
 & 5 & 3 & 4 & 6 & 0 & 3
\end{array}
$$

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Essas contas estão "certas" ou "erradas"?

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 1 – Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Existem mais números racionais ou mais números irracionais?

1 ⟶ 0.11774746397598273897418749817589...
2 ⟶ 0.13423546556897893479348759347893...
3 ⟶ 0.89726349847123894723847237847389...
4 ⟶ 0.48972389723894723947238974238974...
5 ⟶ 0.25000000000000000000000000000000...
6 ⟶ 0.03590257902358902345890859023859...
7 ⟶ 0.23890579236412358246835015305406...
8 ⟶ 0.44444444444444444444444444444444...
9 ⟶ 0.90897675645345345465749087894523...
10 ⟶ 0.77028905789257893678936983689036...
11 ⟶ 0.10100100010000100000100000010000...
12 ⟶ 0.22725782578257825789257825789578...
⋮ ⋮

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Existem mais números racionais ou mais números irracionais?

- Vamos “escolher aletoriamente” um número real (por exemplo, entre 0 e 1), sorteando suas casas decimais uma por uma por uma:
  - 0,705129898543021...
- Se pudéssemos continuar esse sorteio “até infinito”, seria mais provável obtermos uma representação decimal periódica ou não periódica?
- Qual é a **probabilidade** de obter uma representação decimal periódica com esse processo?

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Em que sentido afirmamos que 0,999... = 1?
- Em que sentido afirmamos que 0,333... = 1/3?
- É possível escrever um número real qualquer em um sistema de numeração posicional de outra base?
- Como escrever 1/3 na base 3? E 0,5 na base 2?
- A que número corresponde a expressão (0,111...) na base 2?
- É possível escrever π na base 7?

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 3 – Números Racionais. Rio de Janeiro: SBM, 2018 (no prelo).

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- É verdade que um número é racional se e somente se tem representação finita ou periódica em um sistema de numeração posicional em uma base qualquer?
- Como determinar se um número racional tem representação finita ou periódica em um sistema de numeração posicional em outra base?

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 3 – Números Racionais. Rio de Janeiro: SBM, 2018 (no prelo).

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Parece haver uma concepção de que a exposição da matemática de forma problematizada implicaria em um ***"enfraquecimento"*** do conhecimento.
- Entretanto, a forma não problematizada não corresponde nem mesmo ***aos processos como a própria matemática é produzida***, muito menos ***a como a disciplina deve ser exposta na escola***.
- Ao contrário, a incerteza e o erro têm um papel decisivo na próprio desenvolvimento histórico da matemática – a "ciência do rigor e da certeza" ***corresponde a um retrato estático da matemática estabelecida, e não a seus processos de produção***.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

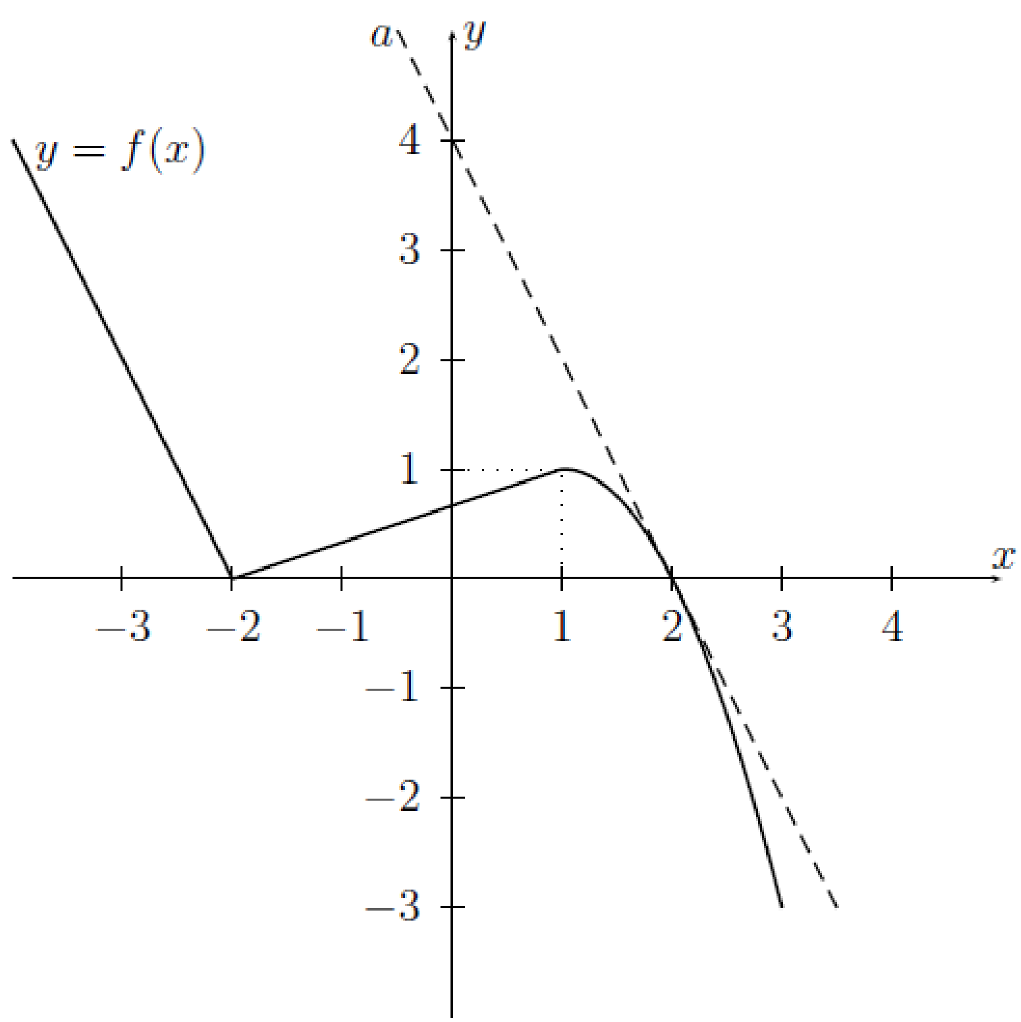
Dados uma reta ***r*** e um ponto ***P*** não pertencente a ***r***, quantas paralelas a ***r*** passam por ***P***?

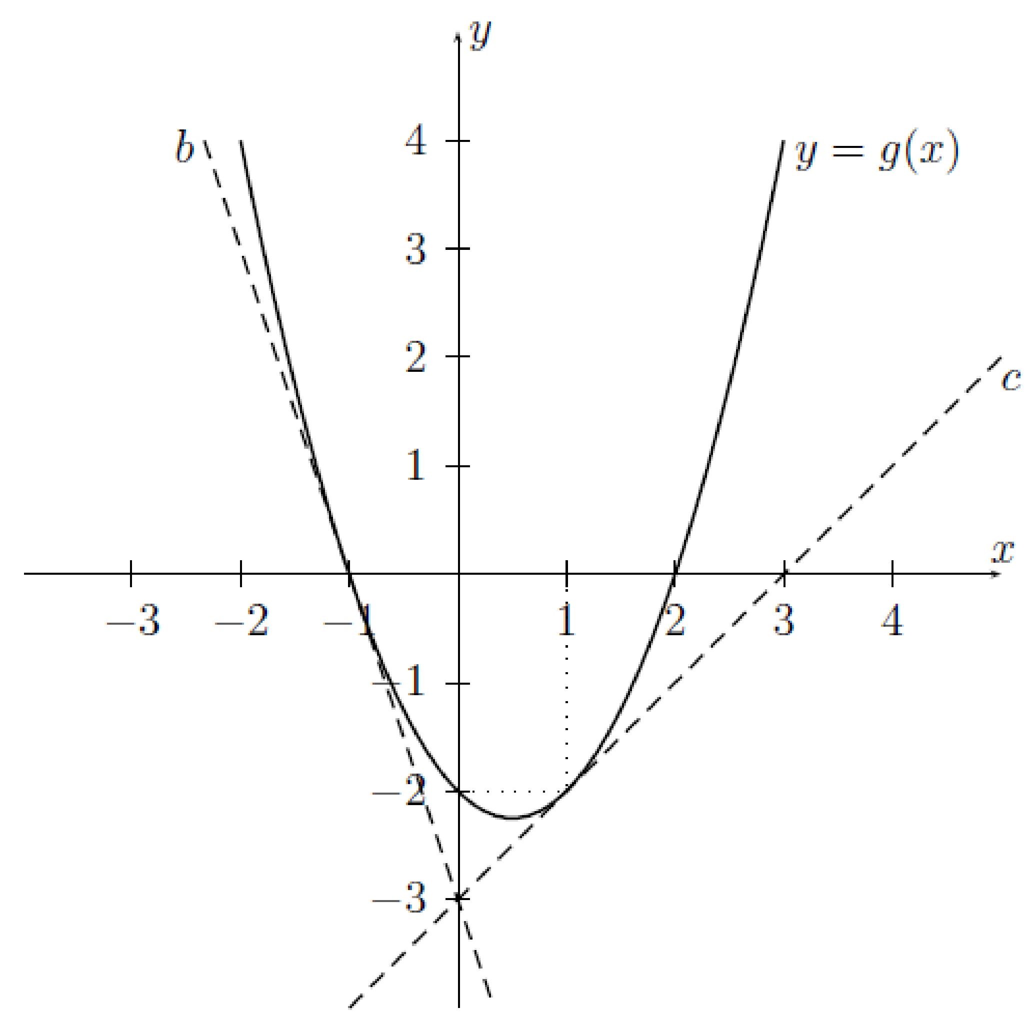
MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- A construção de saberes profissionais docentes no curso de licenciatura não se dá apenas por meio de "***conteúdos da matemática da universidade que têm relações com a matemática escolar***".
- Essa construção se dá, sobretudo, por meio ***de formas de ensinar a matemática na universidade que sugerem modelos para as formas de ensinar a matemática na escola***.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Determine (fog)’(-1) e (fog)’(1).





MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Por que as definições são assim?

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid x \in D , \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- E não assim?

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \mid x \in D , \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid x \in D , \; | f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta$$

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Por que as hipóteses dos teoremas são assim?

Teorema do Valor Médio

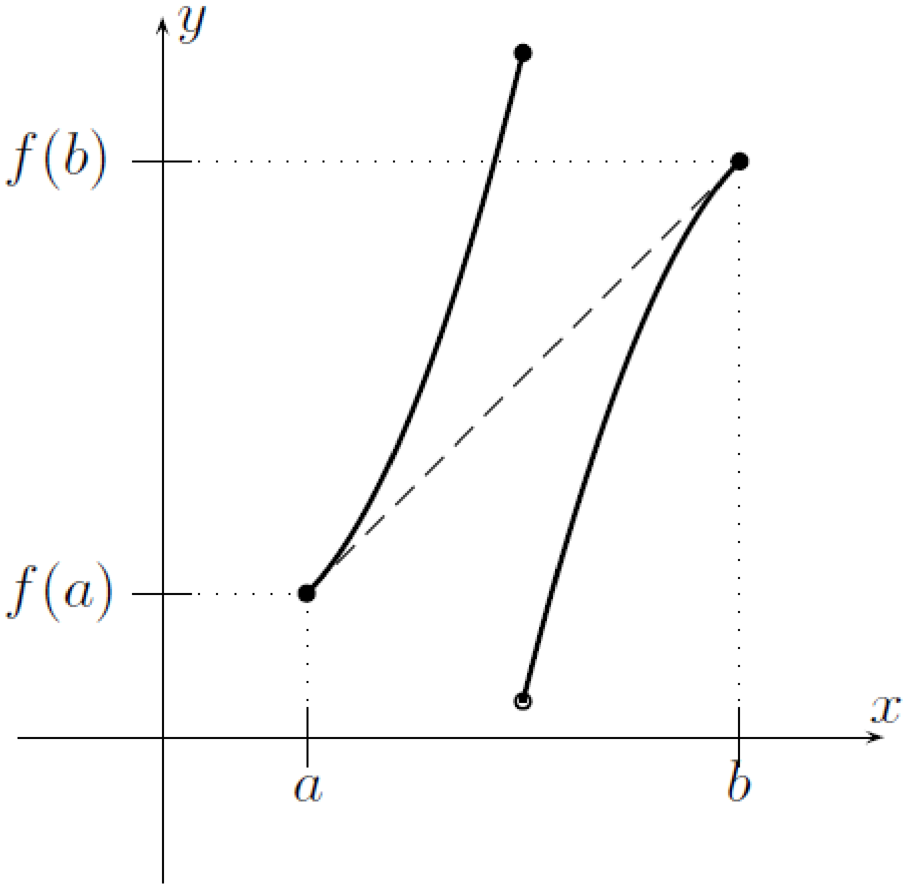
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $]a, b[$.

Então, $\exists\, c \in]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

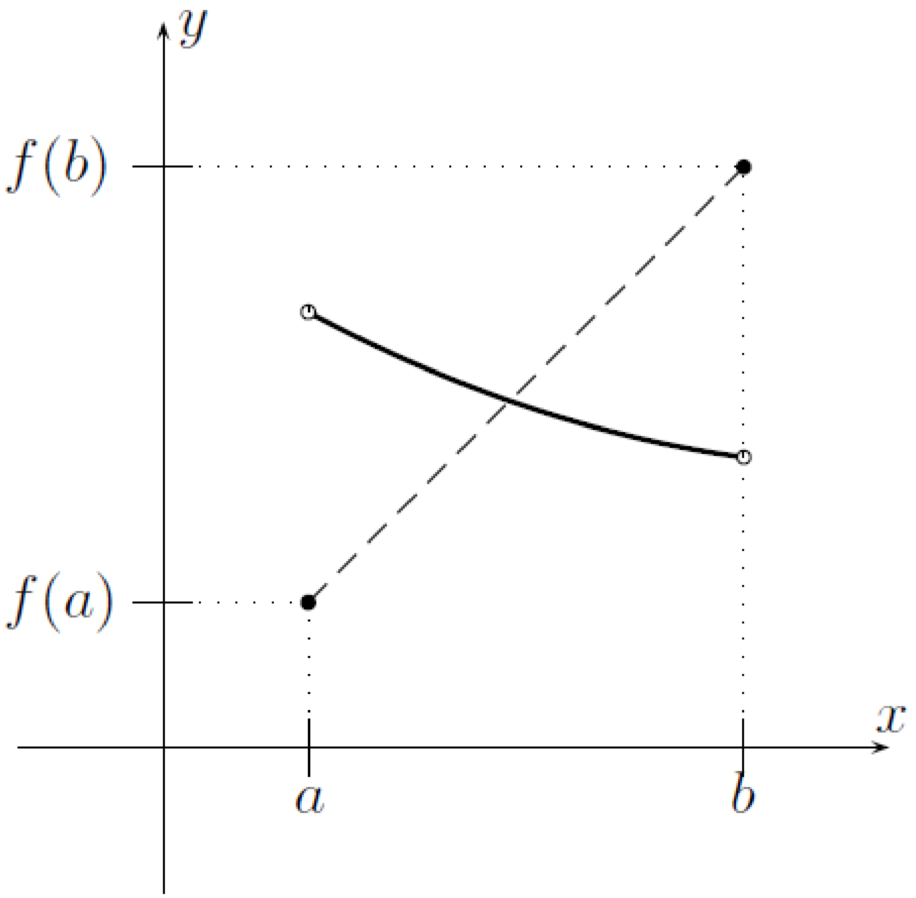
- Por que "*contínua em [a,b]*"?



- f é descontínua em *[a,b].*

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

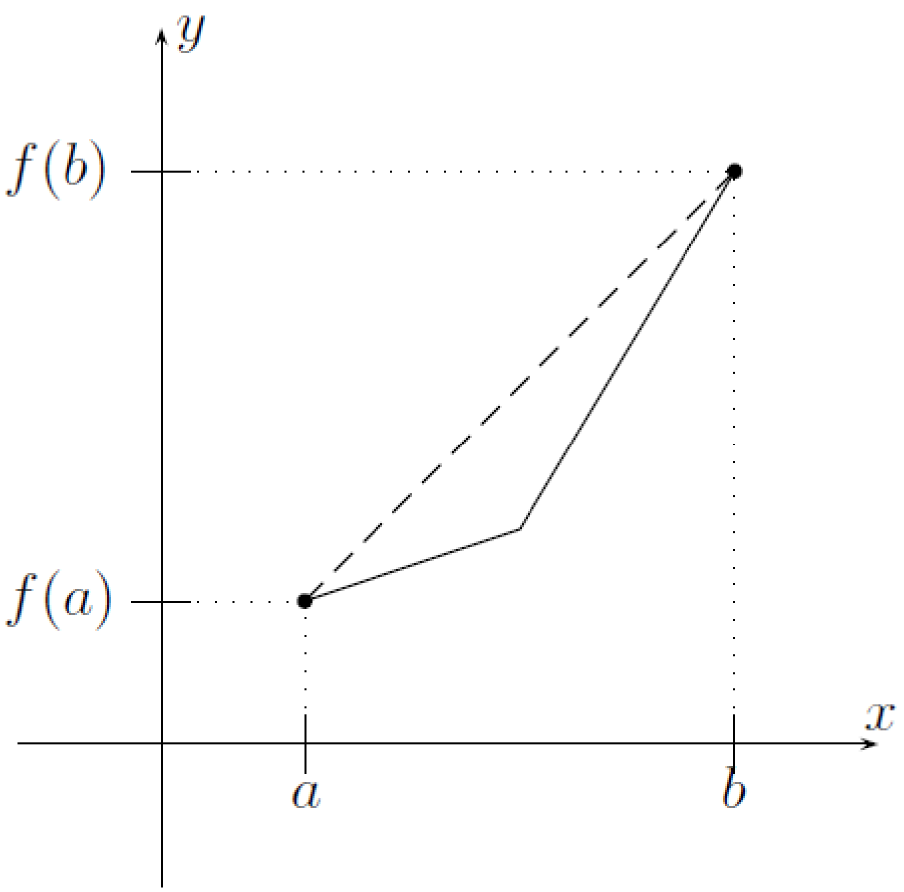
- Por que “*contínua em [a,b]*”?



- f é diferenciável em *]a,b[*, mas não é contínua em *[a,b].*

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Por que "*diferenciável em]a,b[*"?



- f é contínua em *[a,b],* mas não é diferenciável em *]a,b[.*

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Matos, Giraldo & Quintaneiro aplicaram tarefas que abordavam ideias relacionadas ao Teorema do Valor Intermediário, no contexto de um curso de Análise e em uma aplicação no contexto da educação básica.

Tarefa 1 – Em uma avaliação aplicada no Ensino Médio, o aluno deveria resolver a seguinte questão:

Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x - 3; & x < 1 \\ x^6 + x^4 + 1; & x \geq 1 \end{cases}$, é correto afirmar que:

a) f possui pelo menos um zero no intervalo $]0, 2[$?

b) f possui exatamente um zero no intervalo $]-2, 0[$?

Matos, D.; Giraldo V.; Quinaneiro, W. A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de análise real. Boletim GEPEM, 70, p. 26-42, 2017.

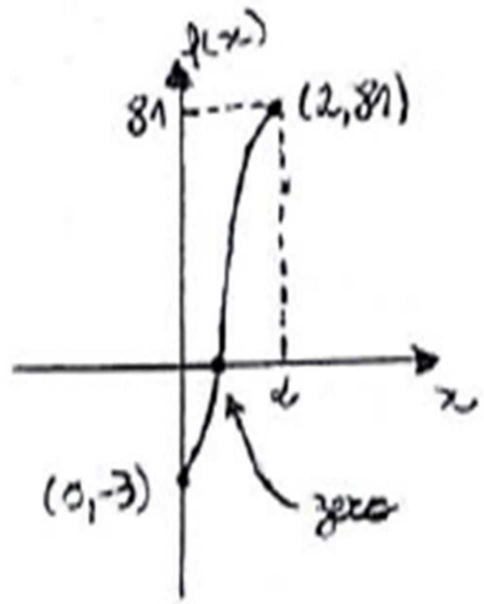
MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Solução de Ana

a) $f(0) = -3$

$f(2) = 2^6 + 2^4 + 1 = 81$

Como $f(0) = -3$ é negativo e $f(2) = 81$ é positivo, o gráfico da função f irá cortar o eixo x para ligar os pontos $(0, -3)$ e $(2, 81)$.



Assim, f terá pelo menos um zero em $]0, 2[$

Matos, D.; Giraldo V.; Quinaneiro, W. A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de análise real. Boletim GEPEM, 70, p. 26-42, 2017.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

Solução de Carlos

a) • Caso $x \geq 1$, temos que $x^6, x^4 \geq 1$. Logo, $f(x) \geq 3a$, portanto, f não possui zero em $[1,2[$.

• Caso $0 < x < 1$, temos que encontrar as raízes do polinômio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x - 3$.

$a = \pm 1; \pm 3$ são os divisores de $a_0 = -3$

$b = \pm 1; \pm 2$ são os divisores de $a_4 = 2$

As possíveis raízes reais do polinômio são da forma $\frac{a}{b}$.

Candidatos a raízes: $\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$.

De todos os candidatos, apenas -1 e $-\frac{1}{2}$ são raízes do polinômio, pois $p(-1) = p(-\frac{1}{2}) = 0$. Logo, f também não possui zero em $]0,1[$.

Assim, f não possui zero em $]0,2[$.

Matos, D.; Giraldo V.; Quinaneiro, W. A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de análise real. Boletim GEPEM, 70, p. 26-42, 2017.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Resultados mostraram que os participantes valorizaram mais produções de alunos consideradas por eles como "***mais formais***", o que correspondia essencialmente a escritas com **mais simbologia algébrica** e **sem representações mais gráficas** – mesmo **em detrimento da avaliação da correção matemática** dessas produções.

Matos, D.; Giraldo V.; Quinaneiro, W. A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de análise real. Boletim GEPEM, 70, p. 26-42, 2017.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- A formação de professores deve fornecer elementos para que o professor seja capaz de:
  - *usar os processos de produção da matemática para problematizar a matemática acadêmica*;
  - *usar a matemática acadêmica para problematizar os processos de produção de matemática na escola*.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Exemplo: ***"Regra dos Sinais"***
  - Da perspectiva da **matemática estabelecida**, as definições das operações envolvendo números negativos são uma exigência da consistência matemática da estrutura algébrica (de anel) dos números inteiros.
  - Da perspectiva ***histórica***, essas definições ganharam legitimidade quando se estabeleceram intepretações geométricas compatíveis com as operações algébricas.
  - Da perspectiva da ***produção de matemática na escola***, é importante ensinar operações com números negativos, não como "regras arbitrárias", "convenções", mas explorando e valorizando diversos estratégias de cálculo, especialmente aqueles propostos ou construídos pelos alunos.

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 2 – Números Inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA X NÃO PROBLEMATIZADA

- Exemplo: ***“Regra dos Sinais”***

  - Multiplicação em **N**: ***ampliação***
  - Multiplicação em **Z**: ***ampliação / reflexão***
  - Multiplicação em **Q** e em **R**: ***ampliação ou redução / reflexão***
  - Multiplicação em **C**: ***homotetia / rotação***

Ripoll, C.; Giraldo V.; Rangel, L. Matemática para o Ensino – Volume 2 – Números Inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OBRIGADO!

VICTOR GIRALDO

VICTOR.GIRALDO@GMAIL.COM

WWW.PG.IM.UFRJ.BR/PEMAT